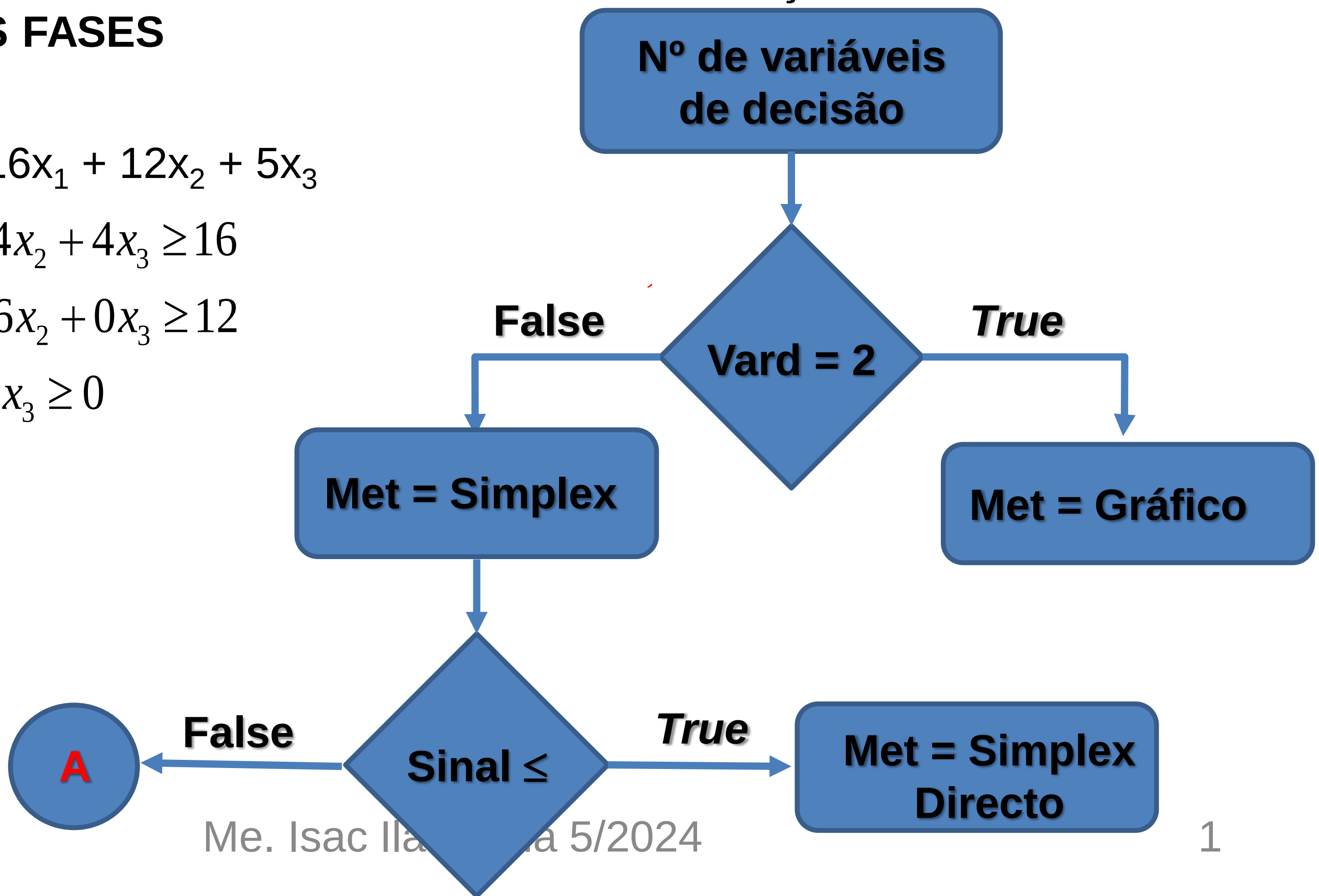
INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

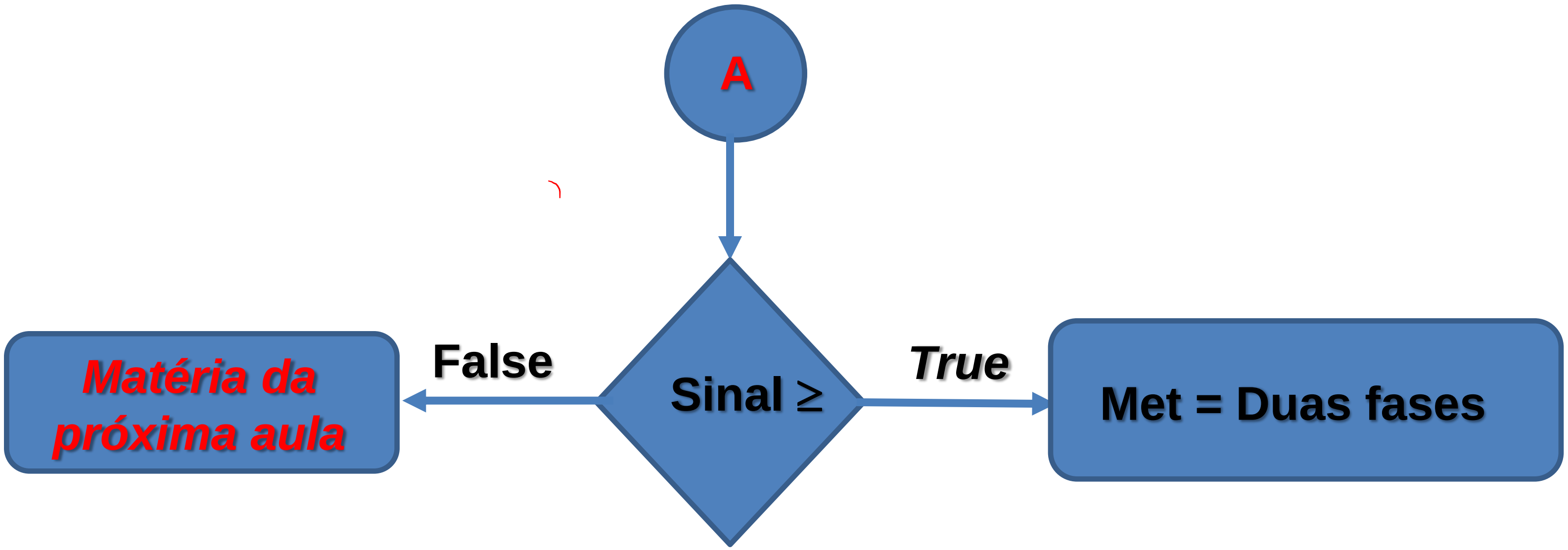
TEMA 2: Programação Linear

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PELO MÉTODO DUAS FASES

Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 \geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$




A
False
True
Sinal ≥
Matéria da
próxima aula
Met = Duas fases

Os passos gerais para os problemas de minimização são:

Passo 1. Introduzir as variáveis de excesso (-x_{m+n}) e artificiais (+ai) para cada restrição.

Passo 2. Criar uma nova função objectivo formada pela:

- soma dos coeficientes das equações para a mesma variável tomados com o sinal negativo $d = -(a_{11}+_{21}+...+a_{n1})$;
- soma dos coeficientes das variáveis artificiais que é igual a zero;
- nova função objectivo que é igual a soma dos termos intependentes tomados com o sinal negativo ($Z_a = -(b_1+ b_2 +...+ b_n)$)

Passo 3. Escreve-se a tabela inicial do simplex para a 1ª fase do processo de resolução do problema.

Passo 4. Aplica-se normalmente o procedimento do método simplex, tomando-se como função objectivo a última linha. Quando a solução óptima for atingida dois casos podem ocorrer:

- $Za = 0$: neste caso foi obtida uma solução básica do problema original e o processo de solução deve continuar, desprezando-se as variáveis artificiais e os elementos da última linha. É o início da fase 2 do processo.

- $Za \neq 0$: neste caso o problema original não tem solução viável.

Resolver o seguinte problema de programação linear pelo método simplex.

Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 \geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0a_1 + 0a_2$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \boxed{-x_4} + 0x_5 \boxed{+a_1} + 0a_2 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \boxed{-x_5} + 0a_1 \boxed{+a_2} = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$

Maximizar $Za = -12x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0a_1 + 0a_2 - 28$

Tabela inicial simpelx

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a1	a2	bi	
a1	8	4	4	-1	0	1	0	16	2
a2	4	6	0	0	-1	0	1	12	3
W	-16	-12	-5	0	0	0	0	0	
Za	-12	-10	-4	1	1	0	0	-28	

1ª Fase (1ª Iteração)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a1	a2	bi	
x1	1	1/2	1/2	-1/8	0	1/8	0	2	(4)
a2	0	4	-2	1/2	-1	-1/2	1	4	(1)
W	0	-4	3	-2	0	2	0	32	
Za	0	-4	2	-1/2	1	3/2	0	-4	

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a1	a2	bi
a1	8	4	4	-1	0	1	0	
a2	4	6	0	0	-1	0	1	
W	-16	-12	-5	0	0	0	0	
Za	-12	-10	-4	1	1	0	0	

$$6-\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{\underset{\cancel{2}}{\cancel{8}}}}}=4$$

1ª Fase (2ª Iteração)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a1	a2	bi
x1	1	0	3/4	-3/16	1/8	3/16	-1/8	3/2
x2	0	1	-1/2	1/8	-1/4	-1/8	1/4	1
W	0	0	1	-3/2	-1	3/2	1	36
Za	0	0	0	0	0	1	1	0

Como na última linha o valor da função objectivo artificial é igual a zero, a fase 1 termina e a solução encontrada é solução básica inicial para a fase 2.

Tabela inicial simplex (2ª fase)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	b1
x1	1	0	**3/4**	-3/16	1/8	3/2
x2	0	1	-1/2	1/8	-1/4	1
W	0	0	1	-3/2	-1	36

(2) *Escolhe-se o menor quociente positivo*

neg

Escolhe-se o mais positivo

Lembre-se que o objectivo é de minimizar, portanto os inicadores da linha pivô devem ser todos negativos. Sendo assim, vamos à iteração seguinte

2ª Fase (2ª Iteração)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	b1
x3	4/3	0	1	1/4	1/7	2
x2	2/3	1	0	0	-1/6	2
W	-4/3	0	0	-5/4	-1/7	34

Solução $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $W_{min} = 34$

Resolver o problema pelo método de duas fases:

Minimizar $W = 4x_1 + x_2$

Sujeito à
$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 1x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Minimizar $W = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0a_1 + 0a_2 + 0a_3$

Sujeito à
$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 \boxed{-x_3} + 0x_4 + 0x_5 \boxed{+a_1} + 0a_2 + 0a_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 \boxed{-x_4} + 0x_5 + 0a_1 \boxed{+a_2} + 0a_3 = 6 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \boxed{-x_5} + 0a_1 + 0a_2 \boxed{+a_3} = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex (1ª fase)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a1	a2	a3	bi	
a1	**3**	1	-1	0	0	1	0	0	3	1
a2	4	3	0	-1	0	0	1	0	6	3/2
a3	1	2	0	0	-1	0	0	1	3	3
W	-4	-1	0	0	0	0	0	0	0	
Za	-8	-6	1	1	1	0	0	0	-12	

1ª Fase (Iteração 1)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a2	a3	bi	
x1	1	1/3	-1/3	0	0	0	0	1	3
a2	0	5/3	4/3	-1	0	1	0	2	6/5 ←
a3	0	5/3	1/3	0	-1	0	1	2	6/5
W	0	1/3	-4/3	0	0	0	0	4	
Za	0	-10/3	-5/3	1	1	0	0	-4	

↑

1ª Fase (Iteração 2)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	a3	bi
x1	1	0	-3/5	1/5	0	0	3/5
x2	0	1	4/5	-3/5	0	0	6/5
a3	0	0	-1	1	-1	1	0
W	0	0	-24/5	1/5	0	0	18/5
Za	0	0	1	-1	1	0	0

3

negativo

0

1ª Fase (Iteração 3)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x1	1	0	-2/5	0	1/5	3/5
x2	0	1	1/5	0	-3/5	6/5
x4	0	0	-1	1	-1	0
W	0	0	-7/5	0	1/5	18/5
Za	0	0	0	0	0	0

Como na última linha o valor da função objectivo artificial é igual a zero, a fase 1 termina e a solução encontrada é solução básica inicial para a fase 2.

Tabela inicial simplex (2ª fase)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x1	1	0	-2/5	0	1/5	3/5
x2	0	1	1/5	0	-3/5	6/5
x4	0	0	-1	1	-1	0
W	0	0	-7/5	0	1/5	18/5

3 ←

negativo

negativo

2ª fase (iteração 1)

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x5	5	0	-2	0	1	3
x2	3	1	1	0	0	3
x4	5	0	-3	1	0	3
W	-1	0	-1	0	0	3

Solução $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 3$; $x_5 = 3$; $W_{min} = 3$

SUMÁRIO

Resolução de problemas de programação linear pelo método simplex

O método Simplex de Duas Fases

TPC: Mulenga, página 37 (2.16, 2.17 alínea b). Página 38 1. b, 2. b